Dérivées et applications

1 Variation et taux de variation

Le nombre de malades à l'instant t est modélisé par la fonction N.

$$N(t) = 24t^2 - t^3 + 50 \tag{1}$$

Nous aurons besoin de certaines valeurs de la fonction N pour résoudre l'exercice :

$$\begin{aligned}
N(0) &= 24 \cdot 0^2 - 0^3 + 50 && (2)\\
&= 24 \cdot 0 - 0 + 50 && (3)\\
&= 50 && (4)\\
N(3) &= 24 \cdot 3^2 - 3^3 + 50 && (5)\\
&= 239 && (6)\\
N(6) &= 24 \cdot 6^2 - 6^3 + 50 && (7)\\
&= 698 && (8)\\
N(9) &= 24 \cdot 9^2 - 9^3 + 50 && (9)\\
&= 1265 && (10)\\
N(12) &= 24 \cdot 12^2 - 12^3 + 50 && (11)\\
&= 1778. && (12)
\end{aligned}$$

a) Compléter le tableau ci-dessous.

Durée de l'observation	Variation du nombre total de personnes malades	Taux moyen de variation
jusqu'au 3^e jour	$N(3) - N(0) = 239 - 50 = 189$	$\frac{N(3) - N(0)}{3} = \frac{189}{3} = 63$
entre le 3^e et le 6^e jour	$N(6) - N(3) = 698 - 239 = 459$	$\frac{N(6) - N(3)}{3} = \frac{459}{3} = 153$
entre le 6^e et le 9^e jour	$N(9) - N(6) = 1265 - 698 = 567$	$\frac{N(9) - N(6)}{3} = \frac{567}{3} = 189$
entre le 9^e et le 12^e jour	$N(12) - N(9) = 1778 - 1265 = 513$	$\frac{N(12) - N(9)}{3} = \frac{513}{3} = 171$

On constate que, pour une même durée d'observation, les taux moyens de variation ne sont pas constants.

b) Quelle différence y a-t-il entre variation du nombre de malades et taux moyen de variation du nombre de malades ?

Le taux moyen de variation du nombre de malades est la variation du nombre de malades *divisé par la durée de la variation.*

c) Quelle est la variation du nombre de malades pendant les douze premiers jours de l'observation ?

$$N(12) - N(0) = 1778 - 50 = 1728. \tag{13}$$

d) Calculer le taux moyen de variation du nombre de malades sur ces douze premiers jours.

$$\frac{N(12) - N(0)}{12} = \frac{1728}{12} = 144 \tag{14}$$

e) Calculer le taux moyen de variation du nombre de malades entre le douxième et le dix-huitième jour de l'observation.

$$\begin{aligned} N(18) &= 24 \cdot 18^2 - 18^3 + 50 && (15)\\ &= 1994. && (16)\\ N(12) &= 1778. && (17)\\ 18 - 12 &= 6. && (18)\\ \frac{N(18) - N(12)}{18 - 12} &= \frac{1994 - 1778}{6} && (19)\\ &= 36. && (20) \end{aligned}$$

f) Comment peut-on représenter un taux moyen de variation sur le graphique ?
Graphiquement, le taux moyen de variation entre les instants t_1 et t_2 est la pente de la sécante passant par les points $(t_1; N(t_1))$ et $(t_2; N(t_2))$.

2 De la sécante à la tangente

Nous avons vu ceci au cours plusieurs fois.

a) Sur les figures 4 et 5, un logiciel graphique a ajouté quelques tangentes en des points des courbes.
Observer ces graphiques. Quel lien peut-on établir entre la pente des tangentes et le sens de variation des fonctions ?
Lorsque la pente de la tangente est positive, la fonction augmente.
Lorsque la pente de la tangente est négative, la fonction diminue.

b) Il est difficile de déterminer la pente d'une droite dont on ne connaît qu'un seul point. On imagine donc que le point B (fig. 6) s'approche du point A jusqu'à se confondre avec lui et on observe le mouvement correspondant de la sécante AB. Que devient la pente de la sécante lorsque B se rapproche de A ?
La pente de la sécante AB tend vers la pente de la tangente au graphique en A.

c) On connaît l'expression de la pente de la sécante AB. Quelle est l'expression de la pente de la tangente en A ?
L'expression de la pente de la sécante AB est

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{21}$$

L'expression de la pente de la tangente en A est donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{22}$$

3 De la tangente à la dérivée

Soit $f(x) = -2x^2 + 3x$.

a) Calculer la pente de la tangente au point (1 ;1) du graphique de f.
Soit A le point (1 ;1). Il appartient au graphique de f.
Soit le point Q d'abscisse x. Supposons qu'il appartient au graphique de f.
Dès lors, les coordonnées de Q sont $(x; -2x^2 + 3x)$.

La pente de la droite AQ est

$$\frac{y_Q - y_A}{x_Q - x_A} = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x - 1} \tag{23}$$

Lorsque $Q \to A$, la droite AQ tend vers la tangente du graphique de f en A. Donc la pente de la droite AQ tend vers celle de la tangente du graphique de f en A. Et c'est ce que nous cherchons. Or faire tendre Q vers A, c'est faire tendre x vers 1 :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x - 1} &= \frac{\to 0}{\to 0} && (24)\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-2 \cdot (x-1) \cdot (x + \frac{1}{2})}{x - 1} && (25)\\
&= \lim_{x\to 1} -2 \cdot (x - \frac{1}{2}) && (26)\\
&= \lim_{x\to 1} -2 \cdot (1 - \frac{1}{2}) && (27)\\
&= -2 \cdot \frac{1}{2} = -1. && (28)
\end{aligned}$$

b) Le point $(a, f(a))$ est un point quelconque du graphique de f.
Pour déterminer la pente de la tangente en ce point, calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{-2(a+h)^2 + 3(a+h) - (-2a^2 + 3a)}{h} && (29)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2(a^2 + 2ah + h^2) + 3(a+h) + 2a^2 - 3a}{h} && (30)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2a^2 - 4ah - 2h^2 + 3a + 3h + 2a^2 - 3a}{h} && (31)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-4ah - 2h^2 + 3h}{h} && (32)\\
&= \frac{\to 0}{\to 0} && (33)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot (-4a - 2h + 3)}{h} && (34)\\
&= \lim_{h\to 0} (-4a - 2h + 3) && (35)\\
&= -4a + 3 && (36)
\end{aligned}$$

c) Utiliser le résultat obtenu pour calculer la pente de la tangente aux points d'abscisse $a = 2$, $a = -1$, $a = 0,75$.

- $a = 2$:

$$\begin{aligned}
-4a + 3 &= -4 \cdot 2 + 3 && (37)\\
&= -8 + 3 && (38)\\
&= -5. && (39)
\end{aligned}$$

- $a = -1$:

$$\begin{aligned}
-4a + 3 &= -4 \cdot (-1) + 3 && (40)\\
&= 4 + 3 && (41)\\
&= 7. && (42)
\end{aligned}$$

- $a = 0,75$:

$$\begin{aligned} -4a+3 &= -4 \cdot 0,75 + 3 && (43)\\ &= -3+3 && (44)\\ &= 0. && (45) \end{aligned}$$

d) Ecrire l'expression de la fonction qui permet de calculer la pente de la tangente en n'importe quel point du graphique de $f(x) = -2x^2 + 3x$.

$$f'(x) = -4x + 3.$$

4 Vitesse instantanée

On lâche un caillou dans un puits profond de 140 mètres. Par les lois de la physique, on sait que la distance parcourue est

$$f(t) = 4,9t^2. \quad (46)$$

a) En combien de secondes le caillou atteint-il le fond du puits ?

$$\begin{aligned} 140 &= 4,9t^2 && (47)\\ \frac{140}{4,9} &= t^2 && (48)\\ \sqrt{\frac{140}{4,9}} &= t && (49)\\ t &\simeq 5,35 \ \ s. && (50) \end{aligned}$$

Quelle est sa vitesse moyenne ?

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{d}{t} && (51)\\ &= \frac{140}{\sqrt{\frac{140}{4,9}}} && (52)\\ &\simeq 26,19 \ \ m/s. && (53) \end{aligned}$$

b) Quelle distance parcourt le caillou entre la 2^e et la 3^e seconde ?
Données :

$$\begin{aligned} t_1 &= 2 && (54)\\ t_2 &= 3. && (55) \end{aligned}$$

La distance parcourue entre la deuxième et la troisième seconde est $f(3) - f(2)$.

$$\begin{aligned} f(3) &= 4,9 \cdot 3^2 && (56)\\ &= 44,1 \ \ m && (57)\\ f(2) &= 4,9 \cdot 2^2 && (58)\\ &= 19,6m. && (59) \end{aligned}$$

$$f(3) - f(2) = 44,1 - 19,6 = 24,5 \quad (60)$$

$$v_m = \frac{f(3) - f(2)}{t_2 - t_1} \quad (61)$$

$$t_2 - t_1 = 3 - 2 = 1 \tag{62}$$

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{24,5}{1} && (63)\\ &= 24,5 \ \ m/s. && (64) \end{aligned}$$

Le caillou chute-t-il à la même vitesse tout au long de la descente ?
Non : la vitesse moyenne sur toute la descente est de 26,19 m/s, alors que la vitesse moyenne entre la deuxième et la troisième seconde est de 24,5 m/s. C'est normal, puisque la pierre accélère pendant sa chute.

c) La vitesse moyenne entre les moments t et $t+h$ est le rapport

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}. \tag{65}$$

La vitesse instantanée au moment t est la limite de ce rapport lorsque $h \to 0$.
Quelle est la vitesse instantanée du caillou à l'instant t ?

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{4,9 \cdot (t+h)^2 - 4,9 \cdot t^2}{h} && (66)\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4,9 \cdot (t^2 + 2ht + h^2) - 4,9 \cdot t^2}{h} && (67)\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4,9t^2 + 2 \cdot 4,9 \cdot ht + 4,9 \cdot h^2 - 4,9 \cdot t^2}{h} && (68)\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2 \cdot 4,9 \cdot ht + 4,9 \cdot h^2}{h} && (69)\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4,9h \cdot (2t + h)}{h} && (70)\\ &= \lim_{h\to 0} 4,9 \cdot (2t + h) && (71)\\ &= 4,9 \cdot (2t + 0) && (72)\\ &= 4,9 \cdot 2t && (73)\\ &= 9,8t. && (74) \end{aligned}$$

Quelle est la vitesse instantanée du caillou en t=2 s, en t=4 s ?
En t=2 s :

$$9,8t = 9,8 \cdot 2 = 19,6 \ \ m/s \tag{75}$$

En t=4 s :

$$9,8t = 9,8 \cdot 4 = 39,2 \ \ m/s \tag{76}$$

La vitesse instantanée au moment t est la fonction dérivée de la fonction $f(t)$.

5 Dérivée de fonctions usuelles

a) Obsever les graphiques suivants (fig. 7 et 8) et écrire l'expression de leur fonction dérivée.

- $f(x) = 2$.
  La tangente au graphique de cette fonction en tout point du graphique, est une droite horizontale.
  Sa pente est donc zéro.

$$f'(x) = 2' = 0. \tag{77}$$

- $f(x) = x$
  La tangente au graphique de cette fonction en tout point du graphique, est confondue avec le graphique lui-même.
  C'est une droite de pente 1.

$$f'(x) = x' = 1. \tag{78}$$

b) On explique comment on calcule la fonction dérivée de $f(x) = x^2$.
Utiliser la même démarche pour déterminer la dérivée des fonctions suivantes : $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 5x^2$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$.

- $f_1(x) = x^3$

  Taux de variation :

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3hx^2 + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \frac{3hx^2 + 3xh^2 + h^3}{h} \tag{79}$$

  Fonction dérivée :

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{3hx^2 + 3xh^2 + h^3}{h} && (80)\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot\left(3x^2 + 3xh + h^2\right)}{h} && (81)\\ &= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 && (82)\\ &= 3x^2 + 3x\cdot 0 + 0^2 && (83)\\ &= 3x^2. && (84) \end{aligned}$$

- $f_2(x) = 5x^2$

  Taux de variation :

$$\begin{aligned} \frac{5(x+h)^2 - 5x^2}{h} &= \frac{5(x^2 + 2hx + h^2) - 5x^2}{h} && (85)\\ &= \frac{5x^2 + 10hx + 5h^2 - 5x^2}{h} && (86)\\ &= \frac{10hx + 5h^2}{h} && (87)\\ &= \frac{5h(2x+h)}{h} && (88)\\ &= 5(2x+h) && (89) \end{aligned}$$

  Fonction dérivée :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{3hx^2 + 3xh^2 + h^3}{h} && (90)\\ &= \lim_{h\to 0} 5(2x+h) && (91)\\ &= 5(2x+0) && (92)\\ &= 5\cdot 2x && (93)\\ &= 10x. && (94) \end{aligned}$$

- $f_3(x) = \frac{1}{x}$

Taux de variation :

$$\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \tag{95}$$

$$= \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} \tag{96}$$

$$= \frac{-\not{h}\cdot 1}{\not{h}\cdot x(x+h)} \tag{97}$$

$$= \frac{-1}{x(x+h)}. \tag{98}$$

Fonction dérivée :

$$f_3'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} \tag{99}$$

$$= \frac{-1}{x\cdot(x+0)} \tag{100}$$

$$= \frac{-1}{x\cdot x} \tag{101}$$

$$= \frac{-1}{x^2} \tag{102}$$

$$= -\frac{1}{x^2}. \tag{103}$$

6 Dérivées et opérations sur les fonctions

a) Soit les fonctions $f(x)=x^2$ et $g(x)=3x$. Calculer $(f+g)'(x)$ et comparer le résultat avec $f'(x)+g'(x)$.

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \tag{104}$$

$$= x^2+3x. \tag{105}$$

Taux de variation :

$$\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} = \frac{[(x+h)^2+3\cdot(x+h)]-[x^2+3\cdot x]}{h} \tag{106}$$

$$= \frac{[x^2+2hx+h^2+3x+3h]-x^2-3x}{h} \tag{107}$$

$$= \frac{x^2+2hx+h^2+3x+3h-x^2-3x}{h} \tag{108}$$

$$= \frac{2hx+h^2+3h}{h} \tag{109}$$

$$= \frac{h\cdot(2x+h+3)}{h} \tag{110}$$

$$= 2x+h+3. \tag{111}$$

Fonction dérivée :

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0}(2x+h+3) \tag{112}$$

$$= 2x+0+3 \tag{113}$$

$$= 2x+3. \tag{114}$$

$$f(x) := x^2 \tag{115}$$

Taux de variation :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2-x^2}{h} && (116)\\
&= \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} && (117)\\
&= \frac{2hx+h^2}{h} && (118)\\
&= \frac{h\cdot(2x+h)}{h} && (119)\\
&= 2x+h. && (120)
\end{aligned}$$

Fonction dérivée :

$$\begin{aligned}
f'(x) = \lim_{h\to 0}(2x+h) &= 2x+0 && (121)\\
&= 2x. && (122)
\end{aligned}$$

$$g(x) = 3x. \quad (123)$$

Taux de variation :

$$\begin{aligned}
\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{3\cdot(x+h)-3x}{h} && (124)\\
&= \frac{3x+3h-3x}{h} && (125)\\
&= \frac{3h}{h} && (126)\\
&= 3. && (127)
\end{aligned}$$

Fonction dérivée :

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} 3 = 3. \quad (128)$$

Comparaison entre $(f+g)'(x)$ et $f'(x)+g'(x)$:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= 2x+3 && (129)\\
f'(x)+g'(x) &= 2x+3. && (130)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x). \quad (131)$$

b) Soit les fonctions $f(x) = x^2+2x+1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
Calculer $(f\cdot g)(x)$ et $(f\cdot g)'(x)$.

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)(x) &:= f(x)\cdot g(x) && (132)\\
&= (x^2+2x+1)\cdot\frac{1}{x} && (133)\\
&= x+2+\frac{1}{x}. && (134)
\end{aligned}$$

Taux de variation :

$$\begin{aligned}
\frac{x+h+2+\dfrac{1}{x+h}-\left(x+2+\dfrac{1}{x}\right)}{h} &= \frac{x+h+2+\dfrac{1}{x+h}-x-2-\dfrac{1}{x}}{h} && (135)\\
&= \frac{h+\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} && (136)\\
&= 1+\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} && (137)\\
&= 1+\frac{-1}{x(x+h)} && (138)\\
&= 1-\frac{1}{x(x+h)} && (139)
\end{aligned}$$

(voir équation 98).
Fonction dérivée :

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(x)=\lim_{h\to 0}\left(1-\frac{1}{x(x+h)}\right) &= 1-\frac{1}{x(x+0)} && (140)\\
&= 1-\frac{1}{x\cdot x} && (141)\\
&= 1-\frac{1}{x^2}. && (142)
\end{aligned}$$

$$f(x)=x^2+2x+1. \tag{143}$$

Taux de variation :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2+2(x+h)+1-(x^2+2x+1)}{h} && (144)\\
&= \frac{x^2+2hx+h^2+2x+2h+1-x^2-2x-1}{h} && (145)\\
&= \frac{2hx+h^2+2h}{h} && (146)\\
&= \frac{h\cdot(2x+h+2)}{h} && (147)\\
&= 2x+h+2. && (148)
\end{aligned}$$

Dérivée :

$$\begin{aligned}
f'(x)=\lim_{h\to 0}(2x+h+2) &= 2x+0+2 && (149)\\
&= 2x+2. && (150)
\end{aligned}$$

$$g(x)=\frac{1}{x}. \tag{151}$$

Dérivée :

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2} \tag{152}$$

(voir équation 103).
Calculons

$$\begin{aligned}
f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x) &= (2x+2)\cdot\frac{1}{x}+(x^2+2x+1)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) && (153)\\
&= 2+\frac{2}{x}-1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2} && (154)\\
&= 1-\frac{1}{x^2}. && (155)
\end{aligned}$$

Comparons $(f+g)'(x)$ et $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$. Nous constatons :

$$(f+g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x). \tag{156}$$

c) On admet que $(\sin x)'=\cos x$ et $(\cos x)'=-\sin x$.

1) Transformer $f(x)=\sin 2x$ à partir d'une formule trigonométrique et calculer la dérivée du produit obtenu.

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\cdot\sin x\cdot\cos x && (157)\\
(\sin 2x)' &= (2\cdot\sin x\cdot\cos x)' && (158)\\
&= 2'\cdot(\sin x\cdot\cos x)+2\cdot(\sin x\cdot\cos x)' && (159)
\end{aligned}$$

Calculons la dérivée $2'$. Puisque 2 est une constante, son taux de variation est nul, et sa dérivée aussi :

$$2'=0. \tag{160}$$

Reprenons :

$$\begin{aligned}
(\sin 2x)' &= 2'\cdot(\sin x\cdot\cos x)+2\cdot(\sin x\cdot\cos x)' && (161)\\
&= 0\cdot(\sin x\cdot\cos x)+2\cdot(\sin x\cdot\cos x)' && (162)\\
&= 0+2\cdot(\sin x\cdot\cos x)' && (163)\\
&= 2\cdot(\sin x\cdot\cos x)'. && (164)
\end{aligned}$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
(\sin x\cdot\cos x)' &= (\sin x)'\cdot\cos x+\sin x\cdot(\cos x)' && (165)\\
&= \cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot(-\sin x) && (166)\\
&= \cos^2 x-\sin^2 x && (167)\\
&= \cos 2x. && (168)
\end{aligned}$$

Donc :

$$(\sin 2x)'=2\cos 2x. \tag{169}$$

2) Décomposer $f(x)=\sin 2x$ sous la forme $f(x)=g\left(h(x)\right)$. Appliquer la formule $f'(x)=g'\left(h(x)\right)\cdot h'(x)$ pour calculer $(\sin 2x)'$.

$$\begin{aligned}
h(x) &= 2\cdot x && (170)\\
h'(x) &= 2 && (171)\\
g(x) &= \sin x && (172)\\
g'(x) &= (\sin x)' && (173)\\
&= \cos x && (174)\\
g'\left(h(x)\right) &= \cos\left(h(x)\right) && (175)\\
&= \cos 2x && (176)\\
f'(x)=g'\left(h(x)\right)\cdot h'(x) &= \cos(2x)\cdot 2 && (177)\\
&= 2\cdot\cos(2x). && (178)
\end{aligned}$$

Nous retrouvons la même expression de $f'(x)$. Nous retiendrons que, si $f(x)=g\left(h(x)\right)$:

$$f'(x)=g'\left(h(x)\right)\cdot h'(x). \tag{179}$$

7 Quelques fonctions non dérivables ...

a. On donne le graphique (fig. 9) de la fonction $f(x)=\left|x^2-1\right|$.
Au point d'abscisse $x=-1$, il est possible de tracer **deux** tangentes. Quelles sont leurs pentes ? 2 et -2.
Le point (-1,0) est appelé un **point anguleux**.

b. Observer le graphique (fig. 10) de la fonction $f(x)=\sqrt{x+2}$.
Quelle est la pente de la tangente au point d'abscisse $x=-2$? La pente est infinie.
Le point (-2,0) est un **point à tangente verticale**.

8 Dérivée et croissance

On donne, dans un même repère, les graphiques (fig. 11) de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ et de sa dérivée $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.

a. Vérifier que $f'(x)$ est l'expression de la dérivée de la fonction f.

$$\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - (2x^2)' + (3x)' + 1' \tag{180}$$

$$= \frac{3x^2}{3} - 2 \cdot 2x + 3 + 0 \tag{181}$$

$$= x^2 - 4x + 3. \tag{182}$$

b. Compléter le tableau suivant.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
croissance de f		↗	max	↘	min	↗	
signe de f'		+	0	-	0	+	

c. Quelle correspondance peut-on établir entre la croissance de la fonction f et le signe de f' ?
Lorsque f est croissante, f' est positive (et inversement). Lorsque f est décroissante, f' est négative (et inversement). Lorsque f passe par un maximum ou un minimum, f' est nulle (et inversement).

9 Et si l'on poursuivait ...

a. Une courbe (figure 12) peut tourner sa **concavité vers le haut** ou **vers le bas**.
Préciser la position des tangentes par rapport à la courbe :

1) lorsque la concavité est tournée vers le bas.
Les tangentes à la courbes sont alors au-dessus de la courbe.

2) lorsque la concavité est tournée vers le haut.
Les tangentes à la courbes sont alors en-dessous de la courbe.

b. La figure 13 montre, dans un même repère, les graphiques de $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ et de $f''(x) = 2x - 4$.
Vérifier que $f''(x)$ est la dérivée de $f'(x)$.

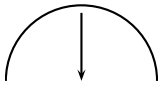
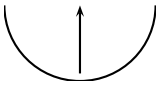
$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \tag{183}$$

$$\left(x^2 - 4x + 3\right)' = (x^2)' - (4x)' + 3' \tag{184}$$

$$= 2x - 4 + 0 \tag{185}$$

$$= 2x - 4. \tag{186}$$

$f''(x)$ est bien la dérivée de $f'(x)$.
On appelle $f''(x)$ la **dérivée seconde**de la fonction $f(x)$.
Compléter le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
concavité de f					
signe de f''		-	0	+	

Quelle correspondance peut-on établir entre le sens de la concavité de la courbe $y = f(x)$ et le signe de f'' ? Lorsque la concavité est vers le bas, f'' est négative (et inversement) ; lorsque la concavité est vers le haut, f'' est positive (et inversement).