Cours d'algèbre du troisième degré technique

Table des matières

1 Compétences à atteindre **2**

2 Les savoirs liés à la compétence 1 **2**

3 Puissances et racines **2**
3.1 Puissances d'exposant > 1 . . . 2
3.1.1 Définition . . . 2
3.1.2 Remarque . . . 3
3.1.3 Exercices . . . 3
3.2 Puissances d'exposant 1 . . . 3
3.3 Puissances d'exposant 0 . . . 4
3.4 Puissances d'exposant négatif . . . 5
3.5 Propriétés des puissances . . . 6
3.5.1 Exercices . . . 6

4 Compétence 1 : Maîtriser le calcul sur les puissances de 10 utiles lors des conversions des unités de mesure et utiliser l'écriture scientifique. **6**
4.1 Exemple 1 . . . 7

5 Compétence 2 : Simplifier des expressions où interviennent des puissances **8**

6 Puissance d'un nombre **8**

7 Le carré ou deuxième puissance d'un nombre **9**
7.1 Situations problèmes . . . 9
7.2 Définition de la deuxième puissance d'un nombre . . . 9

8 Racines de l'équation $x^2 = a$ **9**
8.1 Définition . . . 9
8.2 Combien y a-t-il de racines de l'équation $x^2 = a$? . . . 9
8.2.1 Si $a > 0$ . . . 9
8.2.2 Si $a = 0$ . . . 9
8.2.3 Si $a < 0$ . . . 10
8.3 Propriétés des radicaux d'indice 2 . . . 10
8.3.1 Propriété définitoire . . . 10
8.3.2 Racine carrée du produit de deux nombres positifs ou nuls . . . 10
8.3.3 Racine carrée du quotient de deux nombres strictement positifs . . . 11

9 La valeur absolue d'un nombre **11**
9.1 Réflexion sur les nombres réels . . . 11
9.2 Définition . . . 12

10 Radicaux d'indice n **12**

11 Maîtriser le calcul **12**

12 Mathématiques financières **13**
12.1 Exercices . . . 13

Ce document s'inspire parfois de [?].

1 Compétences à atteindre

1. Maîtriser les différents types de notations des puissances et radicaux.
2. Simplifier des expressions où interviennent des puissances.
3. Calculer des racines.
4. Maîtriser le calcul sur les puissances de 10 utiles lors des conversions des unités de mesure et utiliser l'écriture scientifique.
5. Calculer le n^e terme d'une progression arithmétique (ou géométrique) connaissant le premier et la raison.
6. Connaître les propriétés des logarithmes et savoir les appliquer particulièrement en mathématiques financières.

2 Les savoirs liés à la compétence 1

- La multiplication est commutative.
- Le nombre a étant quelconque non nul, les nombres m et n étant deux entiers relatifs quelconques : $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$.
- Le nombre a étant quelconque non nul, les nombres m et n deux entiers relatifs quelconques : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

3 Puissances et racines

Compétence à atteindre. Maîtriser les différents types de notations des puissances et des radicaux.

3.1 Puissances d'exposant > 1

Cette section est une citation de

http ://math.aki.ch/sites/default/files/05%20Puissances%20et%20racines.pdf

3.1.1 Définition

Il arrive souvent qu'on multiplie un entier plusieurs fois pas lui-même.
Par exemple :

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ est le produit de 6 facteurs égaux à 2.

La notation « puissance » permet d'écrire plus brièvement ce produit.

On note : $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$.

Qui se lit : « 2 à la puissance 6 » ou plus simplement : « 2 puissance 6 ».

D'une manière plus générale, pour un nombre a et un entier $n > 1$, on note :

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ facteurs}} = a^n.$$

On appelle a^n la puissance n^e de a.

Ce symbole se lit : « *a puissance n* ».
Dans le symbole a^n, l'entier n s'appelle *l'exposant* et le nombre a s'appelle *la base*.

3.1.2 Remarque

On a

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

puisque

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ facteurs}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m+n \text{ facteurs}} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

3.1.3 Exercices

1. Calculer :

a) 3^4	e) 1^9	i) $2^3 + 3^2$
b) 100^2	f) $0,1^2$	j) $2^3 \cdot 3^2$
c) $(-5)^2$	g) 400^3	k) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$
d) 12^2	h) $(-2)^3$	

2. Calculer

a) 30^3	e) $0,01^2$	i) $(-1)^{51}$
b) 600^2	f) $0,2^3$	j) 40^1
c) $(-3)^4$	g) $0,3^3$	k) $\left(-\frac{5}{4}\right)^3$
d) 70^2	h) $(-1)^{50}$	

3. Calcule :
   a) $(-4-3)^3 - 2^3$
   b) $(-4)^2 - (-2)(-3)^2 - (-2)^3$
   c) $(-9)^2 - (-3)^3 + (-5)^3$
   d) $(-2) \cdot 16 - (-4)^3 - (-2) \cdot (-8)$

3.2 Puissances d'exposant 1

Voir [?], p. 335 et suivantes.
Nous avons vu que, pour des exposants m et n strictement positifs et un nombre a,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Nous allons imaginer qu'on vit dans un monde où tous les nombres s'expriment uniquement en puissances de a.

Quelques questions.

1. Par quelle puissance de a faut-il multiplier a^3 pour obtenir a^5 ?

$$a^3 \cdot a^? = a^5$$

Réponse : $a^3 \cdot a^2 = a^5$.

2. Par quelle puissance de a faut-il multiplier a^3 pour obtenir a^4 ?
$$a^3 \cdot a^? = a^4$$
Pour répondre à cette question, nous devons réfléchir. Laissons cela en suspens.
3. Effectuer
$$a^m \cdot a = ?$$
4. Effectuer
$$a^5 \cdot a = ?$$
Réponse : $a^5 \cdot a = a^6$.
La puissance a^6 comporte bien *un* facteur de plus que a^5.
5. Revenons à $a^m \cdot a$. Ce cas est similaire au précédent : on gagne un facteur a.
$$a^m \cdot a = a^{m+1}.$$
Par rapport à la formule générale
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$
notre réponse
$$a^m \cdot a = a^{m+1}.$$
est comme déséquilibrée.
Le nombre a n'est pas une puissance au sens que nous avons défini.
Mais nous allons déborder la définition parce qu'on veut fabriquer un monde où tous les nombres s'expriment uniquement en puissances de a. Et que, dans ce monde, on veut prolonger l'efficacité de la formule.
Nous posons donc
$$\boxed{a^1 = a}$$
uniquement pour pouvoir écrire
$$a^m \cdot a = a^m \cdot a^1 = a^{m+1}.$$

3.3 Puissances d'exposant 0

La notation $a^1 = a$ est difficile à accepter pour un esprit qui s'accroche à la première définition de la puissance d'un nombre. Mais l'exposant 0 est encore plus extraordinaire.

Dans un monde où tous les nombres s'expriment uniquement en puissances de a, cherchons le nombre par lequel il faut remplacer le point d'interrogation pour que l'égalité
$$a^3 \cdot a^? = a^3$$
satisfasse à la fameuse formule
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$
Il paraît extraordinaire que l'égalité
$$a^3 \cdot a^? = a^3$$
puisse être vérifiée : multiplier a^3 par une puissance de a semble *devoir* mener à un résultat différent de a^3.
Mais il faut à nouveau déborder de la définition *pour que* cette égalité *puisse* être vérifiée.
Nous savons que
$$a^3 \cdot 1 = a^3.$$
Par rapport à la formule générale
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$
notre réponse
$$a^m \cdot 1 = a^m.$$
est comme déséquilibrée.
Mais comme $m = m + 0$, nous pouvons "équilibrer" notre réponse en posant
$$\boxed{a^0 = 1}$$
dans l'unique but de pouvoir écrire
$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m.$$

3.4 Puissances d'exposant négatif

Puisque nous voulons exprimer *tous* les nombres sous la forme d'une puissance de a, nous devons exprimer notamment l'inverse de a.

$$\frac{1}{a} = a^{?}$$

Nous devons toujours faire en sorte que la formule

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

soit respectée.

Combien vaut

$$a^3 \cdot \frac{1}{a}?$$

Réponse

$$\begin{aligned} a^3 \cdot \frac{1}{a} &= a \cdot a \cdot a \cdot \frac{1}{a} && (1)\\ &= a \cdot a && (2)\\ &= a^2. && (3) \end{aligned}$$

Si nous remplaçons $\frac{1}{a}$ par son expression sous la forme d'une puissance de a, nous obtenons

$$a^3 \cdot a^{?} = a^2,$$

et pour que la formule

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

soit respectée, nous devons avoir

$$3+? = 2.$$

Le nombre qu'il faut additionner à 3 pour obtenir 2 est -1. Ainsi,

$$\boxed{a^3 \cdot a^{-1} = a^2}$$

et

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}.}$$

En effet, quel que soit $m > 1$,

$$\begin{aligned} a^m \cdot \frac{1}{a} &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ facteurs}} \cdot \frac{1}{a}\\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m-1 \text{ facteurs}}\\ &= a^{m-1} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$a^m \cdot a^{-1} = a^{m-1}.$$

La formule est conservée si on pose, quel que soit $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{\frac{1}{a^n} = a^{-n}.}$$

3.5 Propriétés des puissances

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ (a \neq 0) \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ (b \neq 0) \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemples

$3^4 \cdot 3^2 = 3^6$; $\frac{4^8}{4^3} = 4^5$; $(7^5)^3 = 7^{15}$; $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3}$; $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$.

3.5.1 Exercices

1. Compléter par les exposants manquants.

   (a) $5^6 \cdot 5^{\cdots} = 5^8$
   (b) $2^6 \cdot 2^4 = 2^{\cdots}$
   (c) $2^3 + 2^2 = 2^{\cdots}$
   (d) $3^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{\cdots} \cdot 3^{\cdots} = 2^6 \cdot 3^9$
   (e) $7^{\cdots} \cdot 7^2 = 7^2$
   (f) $10^{\cdots} \cdot 10^2 = 10^3$
   (g) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 2^4 \cdot 2^5 = 2^{\cdots} \cdot 3^{\cdots}$
   (h) $3^2 \cdot 3^{\cdots} \cdot 2^4 \cdot 2^{\cdots} = 2^7 \cdot 3^5$
   (i) $(0,2)^4 \cdot (0,2) = (0,2)^{\cdots}$
   (j) $(-2)^3 \cdot (-2)^5 = (-2)^{\cdots}$
   (k) $7^3 \cdot 3^4 \cdot 3^{\cdots} \cdot 7^{\cdots} = 3^6 \cdot 7^9$
   (l) $2^7 \cdot 2^{\cdots} \cdot 3^4 \cdot 3^{\cdots} = 2^7 \cdot 3^4$

2. Compléter par l'exposant manquant.

   (a) $a^3 \cdot a^5 = a^{\cdots}$
   (b) $x^4 \cdot x^2 \cdot x = x^{\cdots}$
   (c) $y \cdot y^5 \cdot y^2 \cdot y^0 = y^{\cdots}$
   (d) $a^3 \cdot b^2 \cdot a^4 \cdot a^2 = a^{\cdots} \cdot b^{\cdots}$
   (e) $a^5 \cdot b^{\cdots} \cdot a^{\cdots} \cdot b^2 = a^8 \cdot b^5$
   (f) $x^5 \cdot y^{\cdots} y^4 \cdot x^{\cdots} = x^6 \cdot y^4$

3. Ecrire aussi simplement que possible chacune des expressions, sans exposant négatif.

   (a) $2^5 \cdot 2^{-3}$
   (b) $\frac{(0,4)^6}{(0,4)^5}$
   (c) $(3+7)^2$
   (d) $\left(4^{-2}\right)^3$
   (e) $10^3 \cdot 10^{-5}$
   (f) $\frac{\pi^3}{\pi^5}$
   (g) $(5 \cdot 9)^{-2}$
   (h) $\left(5^3\right)^{-1}$
   (i) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$
   (j) 0^0

4. Ecrire aussi simplement que possible chacune des expressions, sans exposant négatif.

   (a) $(-5)^3 \cdot (-5) \cdot (-5)^4$
   (b) $(+3)^4 \cdot (-2) \cdot (+3)^2 \cdot (-2)^3$
   (c) $7^2 \cdot \left(7^3\right)^4$
   (d) $3^5 \cdot (3^2 \cdot 3^4)$
   (e) $\left(7^2 \cdot 7^3\right)^4$
   (f) $(-3)^2 \cdot (-3) \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^4$
   (g) $\left[\left(5^2\right)^3 \cdot 3^4\right]^2$
   (h) $\left(4^2\right)^3 \cdot \left(4^3\right)^5 \cdot (4)$

4 Compétence 1 : Maîtriser le calcul sur les puissances de 10 utiles lors des conversions des unités de mesure et utiliser l'écriture scientifique.

Des exercices supplémentaires et interactifs sont disponibles à l'adresse

http ://mathenpoche.sesamath.net/3eme/pages/numerique/chap6/serie1/index.html.

Compétence 1 : Maîtriser le calcul sur les puissances de 10 utiles lors des conversions des unités de mesure et utiliser l'écriture scientifique.

4.1 Exemple 1

$$A = 800 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \cdot (10^{-3})^{-2}$$

a) On modifie l'ordre des facteurs pour effectuer les produits :

i) entre nombres qui ne sont pas des puissances de 10 ;

ii) entre puissances de 10.

$$A = [800 \cdot 20] \cdot \left[10^{-4} \cdot (10^{-3})^{-2}\right]$$

b) Le nombre a étant quelconque non nul, les nombres m et n étant deux entiers relatifs quelconques : $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

$$A = 16\ 000 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3 \cdot (-2)}$$

c) $-3 \cdot (-2) = 6$

$$A = 16\ 000 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{6}$$

d) Le nombre a étant quelconque non nul, les nombres m et n deux entiers relatifs quelconques : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$A = 16\ 000 \cdot 10^{-4+6}$$

e) $-4 + 6 = 2$

$$A = 16\ 000 \cdot 10^{2}$$

f) Ecriture décimale : l'écriture décimale d'une puissance de 10, d'exposant un entier naturel non nul n est : le chiffre 1 suivi de n zéros.

$$A = 16\ 000 \cdot 100$$

g) Pour multiplier un nombre entier par 10 ; 100 ; 1 000 ; ..., il suffit d'écrire un zéro ; deux zéros ; trois zéros ; ... à la droite du nombre.

$$A = 1600000$$

h) Ecriture scientifique d'un nombre

$$d \cdot 10^{n}$$

où

- d est un nombre dont la distance à zéro est comprise entre 1 et 10, sans zéro inutile, pouvant être égal à 1 mais pas à 10
- n est un nombre entier relatif.

$$\begin{aligned} A &= 1600000, \cdot 10^{0} \\ A &= 160000,0 \cdot 10^{1} \\ A &= 16000,00 \cdot 10^{2} \\ A &= 1600,000 \cdot 10^{3} \\ A &= 160,0000 \cdot 10^{4} \\ A &= 16,00000 \cdot 10^{5} \\ A &= 1,600000 \cdot 10^{6} \end{aligned}$$

i) On efface les zéros inutiles

$$A = 1,6 \cdot 10^{6}$$

1. Calcule A, donne son écriture décimale puis son écriture scientifique.

$$A = 70 \cdot 10^{-3} \cdot 600 \cdot 10^{-3}$$

2. Calcule B, donne son écriture décimale puis son écriture scientifique.

$$B = 73\ 000 \cdot \left(10^{-2}\right)^3$$

3. Donne les écritures décimale et scientifique du nombre C. Je te conseille l'utilisation d'un brouillon.

$$C = \frac{0,7 \cdot 10^9}{0,5 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^8}$$

4. Donne les écritures décimale et scientifique du nombre D. Je te conseille l'utilisation d'un brouillon.

$$D = \frac{\left(7 \cdot 10^3\right)^2}{2 \cdot 10^9}$$

5. Donne les écritures décimale et scientifique du nombre E. Je te conseille l'utilisation d'un brouillon.

$$E = \frac{10^{-5}}{\left(4 \cdot 10^{-6}\right)^2}$$

5 Compétence 2 : Simplifier des expressions où interviennent des puissances

Voir le site

http ://www.ilemaths.net/maths_4_puissances_6exos-correction.php

1. Calculer
   (a) $\dfrac{3^5}{3^2}$
   (b) $\dfrac{2^4}{2^{11}}$
   (c) $\dfrac{7^{11}}{7^{11}}$
   (d) $\dfrac{6^2}{6^0}$
   (e) $\dfrac{9}{9^3}$
2. Calculer
   (a) $7^5 \cdot 7^{-3}$
   (b) $9^2 \cdot 9$
   (c) $10^6 \cdot 10^7$
   (d) $2^{-4} \cdot 2^{-1}$
   (e) $5^8 \cdot 5^{-10}$
3. **Les dépenses pour l'armement**
   Les dépenses mondiales pour l'armement atteignaient, en 1985, 800 milliards de dollars.
   (a) Quelle quantité d'argent fut ainsi dépensée par minute ?
   (b) Quelle somme annuelle cela représente-t-il pour chacun des 5 milliards d'êtres humains ?

6 Puissance d'un nombre

Une puissance d'un nombre est le résultat de la multiplication répétée de ce nombre avec lui-même. Elle est souvent notée en assortissant le nombre d'un entier, typographié en exposant, qui indique le nombre de fois qu'apparaît le nombre comme facteur dans cette multiplication.

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Elle se lit « a puissance n » ou « a exposant n ». L'entier n est appelé exposant.

7 Le carré ou deuxième puissance d'un nombre

7.1 Situations problèmes

1. Combien de choux sont dessinés sur cette image ? Précise le calcul à effectuer.
2. Combien de flaments roses sont dessinés sur cette image ? Précise le calcul à effectuer.
3. Que vaut (en cm^2) l'aire d'un carré de 3.6 cm de côté ?
4. Je dois quatre euros à Alice, à Bilal, à Charles et à Dina. Ils décident tous les trois d'annuler ma dette. Ai-je gagné ou perdu de l'argent ? Combien ? Ecris le calcul à effectuer.

7.2 Définition de la deuxième puissance d'un nombre

Pour résoudre ces problèmes, nous avons à chaque fois calculé la deuxième puissance d'un nombre.

Le carré d'un nombre ou la *deuxième puissance* de ce nombre est le produit qu'on obtient en multipliant ce nombre par lui-même. Ainsi, 4 est le carré de 2 et 9 est le carré de 3.

Le carré du nombre x est noté x^2.

8 Racines de l'équation $x^2 = a$

8.1 Définition

Pour $a \in \mathbf{R}$, une racine carrée de a est une valeur réelle de x pour laquelle

$$x^2 = a.$$

Condition d'existence. Par la règle des signes pour la multiplication, x^2 est positif ou nul. Donc a doit être positif ou nul.

Remarque. Le mot "racine" est ici synonyme de solution.

8.2 Combien y a-t-il de racines de l'équation $x^2 = a$?

8.2.1 Si $a > 0$

Par la régle des signes, deux nombres opposés ont le même carré. Par exemple, $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ et $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$.

Le nombre 9 a dès lors deux racines carrées, l'une positive (3) et l'autre négative (-3).

En fait, tout nombre réel $a > 0$ a deux racines carrées, l'une étant l'opposée de l'autre.

8.2.2 Si $a = 0$

Résolvons l'équation

$$x^2 = 0.$$

Nous constatons que $0 \cdot 0 = 0$. Le nombre zéro est ainsi une racine de l'équation

$$x^2 = 0.$$

Par conséquent, -0 est aussi solution de cette équation.

Mais comme 0=-0, l'équation

$$x^2 = 0$$

a une seule racine. L'unique racine de cette équation est le nombre zéro.

L'équation $x^2 = 0$ a une seule solution. La solution de l'équation $x^2 = 0$ est le nombre zéro.

8.2.3 Si $a < 0$

Nous avons vu que a doit être positif ou nul (voir section 8.1).

Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.

8.3 Propriétés des radicaux d'indice 2

Cette partie du cours est presque identique à ce qu'on trouve à l'adresse

http ://users.skynet.be/fc617918/Files/i_radicaux_et_puissances.pdf

8.3.1 Propriété définitoire

$$\forall a \in \mathbf{R}^+, \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

8.3.2 Racine carrée du produit de deux nombres positifs ou nuls

$$\forall a, b \in \mathbf{R}^+, \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

La racine carrée du produit de deux nombres positifs est le produit des racines carrées de ces nombres.

Exemple :

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{4} & = & 2 \\ \sqrt{9} & = & 3 \\ \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6 & \text{et} & \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6. \end{array}$$

Démonstration :
Calculons le carré de $\sqrt{a \cdot b}$ et celui de $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

$$\begin{array}{rcl} \left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2 & = & a \cdot b \\ \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 & = & (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 \\ & = & a \cdot b \end{array}$$

Les deux carrés sont égaux.

$$\left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2$$

Or, par hypothèse, a et b sont positifs ou nul, donc $\sqrt{a \cdot b}$ et $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ le sont aussi. Et deux nombres positifs ou nuls ont le même carré si et seulement s'ils sont égaux.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

CQFD.

8.3.3 Racine carrée du quotient de deux nombres strictement positifs

$$\forall a, b \in \mathbf{R}_0^+, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

La racine carrée du quotient de deux nombres strictement positifs est le quotient des racines carrées de ces nombres.

Exemple :

$$\begin{aligned} \sqrt{36} &= 6 \\ \sqrt{9} &= 3 \end{aligned}$$
$$\sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Démonstration :
Calculons le carré de $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et celui de $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 &= \frac{a}{b} \\ \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 &= \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} \\ &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Les deux carrés sont égaux.

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$$

Or, par hypothèse, a et b sont strictement positifs, donc $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ le sont aussi. Et deux nombres strictement positifs ont le même carré si et seulement s'ils sont égaux.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

CQFD.

9 La valeur absolue d'un nombre

9.1 Réflexion sur les nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$ peut être représenté par une droite munie d'un repère. Chaque nombre réel est alors la coordonnée d'un point de la droite dans ce repère.

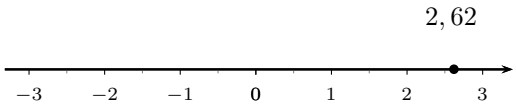

FIGURE 1 – Représentation de l'ensemble des nombres réels

La valeur absolue du nombre réel x est sa distance par rapport à 0. Par exemple,
- la valeur absolue de -2 est 2,
- la valeur absolue de 2 est 2,
- la valeur absolue de $-\frac{\pi}{1+\pi}$ est $\frac{\pi}{1+\pi}$.

Comme la valeur absolue est une distance, elle est toujours positive ou nulle.

9.2 Définition

Pour tout nombre réel x, la valeur absolue de x (notée $|x|$) est définie par :
- $|x| = x$, si $x > 0$,
- $|x| = -x$, si $x < 0$,
- $|x| = 0$, si $x = 0$.

Cela revient exactement à dire comme précédemment que la valeur absolue de x est la distance de x à 0.

10 Radicaux d'indice n

Une racine n^e d'un nombre réel x est un nombre r tel que $r^n = x$, n pouvant prendre toutes les valeurs naturelles à partir de 2, c'est-à-dire $n = 2, 3, 4, \ldots$.

11 Maîtriser le calcul

sur les puissances de 10 utiles lors des conversions des unités de mesure et utiliser l'écriture scientifique.

1. Calcule B, donne son écriture décimale puis son écriture scientifique.

$$B = 52 \cdot \left(10^{-2}\right)^{-1}.$$

2. Calcule C, donne son écriture décimale puis son écriture scientifique. Utilise un brouillon.

$$C = \frac{1,8 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^2}$$

3. Calcule D, donne son écriture décimale puis son écriture scientifique. Utilise un brouillon.

$$D = \frac{\left(80 \cdot 10^2\right)^2}{50 \cdot 10^5}$$

12 Mathématiques financières

12.1 Exercices

1. Une somme de 10000 dinars est placée sur un compte du 23 avril au 9 août au taux simple de 7 %
   (a) Calculer le montant de l'intérêt produit à l'échéance.
   (b) Calculer la valeur acquise par ce capital.
   (c) Chercher la date de remboursement pour un intérêt produit égal à 315 dinars.